Zur

Theorie des Astigmatismus katoptrischer Anamorphosen.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

einer

hohen philosophischen Fakultät der Universität Rostock

vorgelegt

von

Heinrich Bode
aus Hessen i. Br.

Rostock.
Carl Boldt'sche Hof-Buchdruckerei.
1897.

Referent: Herr Prof. Dr. **Matthiessen.**

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

Seinem lieben Vater

und dem Andenken

seiner unvergesslichen Mutter

in Dankbarkeit

gewidmet

vom Verfasser.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552725_0143

Einleitung.

Katoptrische Anamorphosen oder Zerrbilder entstehen bekanntlich bei der Spiegelung irgend eines beliebigen Objektes in einer krummen Oberfläche. Derartige Bilder hat man häufig Gelegenheit zu beobachten, sei es in grossen Gärten, wo sphärische oder parabolische Spiegel zur Zierde aufgestellt sind, oder auf Jahrmärkten und Volksfesten in Schaubuden, in denen die Spiegel dann gewöhnlich eine cylindrische oder konische Gestalt haben und dazu dienen, durch die hervorgebrachten Verzerrungen die Lachlust der Zuschauer zu erregen.

Der Erste, welcher sich eingehender mit der Entstehung und Konstruktion solcher Anamorphosen beschäftigt hat, dürfte wohl der chursächsische Hofmechanikus Jacob Leupold gewesen sein. Dieser gab im Jahre 1713 eine kleine, nur wenige Seiten fassende Abhandlung „Anamorphosis mechanica nova“ heraus, worin er die Konstruktion einiger Maschinen mitteilt, mit deren Hilfe man in einer Ebene von einem beliebigen Objekte derartig verzerrte Figuren zeichnen kann, dass dieselben, von einem bestimmten Augenpunkte aus in einem cylindrischen oder konischen Spiegel gesehen, in den richtigen Proportionen erscheinen.

Mit diesen Maschinen hat der Erfinder dann eine ganze Reihe solcher Bilder gezeichnet, und unter anderen ist auch das hiesige physikalische Institut im Besitze einer

ziemlich grossen Anzahl solcher noch von Leupold entworfenen Anamorphosen.

Die erwähnte kleine Schrift lässt uns jedoch völlig im Unklaren darüber, ob Leupold die Konstruktion der Maschinen auf Grund mathematischer Untersuchungen gefunden hat, oder ob ein günstiger Zufall ihm dabei zu Hilfe gekommen ist. Ferner ist es zweifelhaft, ob Leupold die Gesetze der Spiegelung, auf welche die Verzerrungen zurückzuführen sind, überhaupt gekannt hat.

Die Art der Entstehung der Anamorphosen hängt nämlich eng zusammen mit der astigmatischen Spiegelung. In Wirklichkeit erhalten wir von einem Objekte, welches sich in einem Spiegel mit krummer Oberfläche spiegelt, nicht ein einziges sondern zwei verschiedene Bilder, während in der Abhandlung immer nur von einem Bilde die Rede ist, und der Verfasser es dahingestellt sein lässt, welches von beiden gemeint ist, vorausgesetzt, dass er von der Existenz zweier Bilder unterrichtet war. Wenngleich nun die Gesetze des Astigmatismus in späterer Zeit von einer ganzen Anzahl namhafter Schriftsteller insbesondere für die Brechung genauer untersucht sind, so scheint es doch an einer allgemeinen Theorie der katoptrischen Anamorphosen noch zu fehlen, obgleich man ohne weiteres viele für die Brechung gefundene Resultate auch auf die Reflexion anwenden könnte.

Kapitel I.

Die schiefe Incidenz.

Fällt ein unendlich dünnes homocentrisches Strahlenbündel auf eine reflektierende bezw. brechende krumme Oberfläche, so werden die einzelnen Strahlen des Bündels nach der Reflexion oder Refraktion nur in dem Falle homocentrisch bleiben, also sich wieder in einem Punkte zu einem Bilde vereinigen, wenn wir es mit paraxialen Strahlen, d. h. solchen, welche in unmittelbarer Nähe der optischen Achse verlaufen, und für die demnach die Gaussischen Beschränkungen gültig sind, zu thun haben. Berücksichtigt man dagegen auch diejenigen Strahlenbündel, welche in endlicher Entfernung vom optischen Mittelpunkte mehr nach dem Rande der Fläche zu auf dieselbe fallen (schiefe Incidenz), so vereinigen sich nicht alle Strahlen des Bündels wieder in einem Punkte, wir bekommen in diesem Falle kein bestimmtes scharf fixiertes Bild, das homocentrische Strahlenbündel ist übergegangen in ein astigmatisches. Statt eines Brennpunktes erhalten wir zwei Brennlinien, durch welche alle parallel zum Hauptstrahl des Bündels einfallenden Strahlen hindurchgehen und dergestalt einen tetraedrischen Raum (Reusch) umhüllen.

Die peripherische Dioptrik ist nun von verschiedenen bedeutenden Schriftstellern, wie Sturm, Kummer, Reusch, L. Matthiessen, v. Seidel, Hermann und

einigen anderen eingehend untersucht worden. Zuerst war es der Mathematiker Sturm[1], der darauf hinwies und seine Behauptungen auch mathematisch begründete, dass man bei schiefer Incidenz von jedem leuchtenden Punkte zwei in kleine Linien verzerrte Bilder erhielte, und damit die bis dahin herrschende Ansicht, ein Punkt gäbe auch nach der Brechung resp. Reflexion wieder ein punktuelles Bild, zerstörte. Am Schlusse seiner Ausführungen stellt Sturm die Gleichungen auf, welche es uns ermöglichen, die Lage der Brennlinien zu bestimmen, sofern man die Hauptkrümmungsradien der zu den einfallenden Strahlen senkrechten Fläche sowie der trennenden Fläche kennt. Die für die Dioptrik erhaltenen Resultate lassen sich natürlich ohne irgend welche Einschränkung auch auf katoptrische Probleme anwenden, wenn man nur in bekannter Weise an Stelle des Brechungsindexes den Wert -1 setzt. Bei seinen Untersuchungen fand Sturm, dass diese beiden unendlich kleinen Brennlinien senkrecht zum Hauptstrahl und gegen einander um 90° geneigt seien. Zu demselben Resultate gelangte auch Prof. Kummer[2], und dieser hat von solchen astigmatischen Strahlenbündeln auch Fadenmodelle konstruiert, die er dann zusammen mit einer Denkschrift im Jahre 1860 der Berliner Akademie überreicht hat.

Jedoch ist dieses Ergebnis nicht ganz einwurfsfrei, man gelangt zu demselben nur dadurch, dass man in den notwendigen Rechnungen Glieder von unendlicher Kleinheit zweiter Ordnung gegen solche von erster Ordnung vernachlässigt. Nachdem schon vorher Prof. v. Seidel die Vermutung ausgesprochen hatte, dass doch wohl eine andere Beziehung zwischen der Lage der Brenn-

[1] Sturm, Mémoire sur l'optique. Compt. rend. XX p. 554. 761. Übersetzt in Pogg. Annalen LXV. S. 116. 374 (1845).

[2] Kummer, Allgemeine Theorie der geradlinigen Strahlensysteme. Crelle's Journ. LVII. S. 189 (1859) und Monatsberichte der Berl. Akad. f. 1860 S. 469.

linien zu dem Hauptstrahle eines Bündels stattfände, wies Prof. L. Matthiessen[1] darauf hin, dass es nicht notwendig sei, beide Brennlinien als senkrecht zum Hauptstrahl anzunehmen, indem er gleichzeitig in mehreren Schriften eine genauere Ableitung der in Frage kommenden Rechnungen gab. Auch Matthiessen hat zur Demonstration der Lage der beiden Brennlinien von astigmatischen Strahlenbündeln Fadenmodelle angefertigt, die sich in der Sammlung des hiesigen physikalischen Instituts befinden. Davon dass in der That eine andere Lage der Brennlinien möglich ist, zeugt schon die Betrachtung der Brechung in einer sphärischen Fläche. In diesem Falle steht nämlich wohl die erste Brennlinie senkrecht zum Hauptstrahl, die zweite aber liegt, wie Reusch[2] angegeben hat, in der Centrale des leuchtenden Punktes und muss also mit dem Hauptstrahl des Bündels Winkel bilden, die von 90° verschieden sind.

In der unten angeführten Reusch'schen Abhandlung ist nun nicht nur die Brechung sondern auch die Spiegelung an sphärischen Flächen behandelt, und wollen wir daher etwas näher auf diese Arbeit eingehen.

Reusch betrachtet ein durch zwei unendlich wenig gegen einander geneigte Meridiane und durch zwei unendlich benachbarte Parallelkreise aus der Kugeloberfläche herausgeschnittenes Element. Bei der Spiegelung an demselben Meridian bekommt er als Ort der unendlich kleinen

---

[1] Matthiessen, Gräfes Archiv f. Ophthalm. (1883). Über die Form der astigmatischen Bilder sehr kleiner geraden Linien u. s. w.
—— Münch. Berichte, Über die Form der unendlich dünnen astigmatischen Strahlenbündel und die Kummer'schen Modelle 1883.
—— Schlömilch, Zeitschrift für Math. u. Phys., Neue Untersuchungen über die Lage der Brennlinien u. s. w. (1884).
—— Berlin-Eversbusch, Zeitschrift für vergl. Augenheilkunde, Beiträge zur Dioptrik der Krystalllinse. Dritte Folge (1889).

[2] Reusch, Reflexion und Brechung des Lichts an sphärischen Flächen u. s. w. Pogg. Annalen 1876. S. 497.

Brennstrecke eines leuchtenden Punktes den Durchschnittspunkt zweier unendlich benachbarter Strahlen, bei der Spiegelung an demselben Parallelkreise ist der Ort der zweiten unendlich kleinen Brennstrecke der Schnittpunkt der Centrale des leuchtenden Punktes mit einem unter beliebigem Winkel auf die spiegelnde Fläche fallenden und dann zurückgeworfenen Strahle bezw. dessen blinder Verlängerung.

Infolge dieser astigmatischen Spiegelung erhalten wir also von einem Punkte, welcher sich in einer gekrümmten Fläche spiegelt, kein ähnliches punktuelles Bild, sondern zwei hinter einander liegende in zwei kleine Linien verzerrte Bilder. Die Gesammtheit der von einem Objekte ausgehenden Strahlen führt zur Bildung der Anamorphosen. Nun sieht allerdings der Beschauer nur ein Bild, und es mag hier vorläufig dahingestellt sein, welches von beiden er sieht. Wahrscheinlich wird sich das Auge vermöge seiner Accommodationsfähigkeit auf das ihm zunächst liegende Bild einstellen, aber es ist doch auch sehr gut denkbar, dass es sich auf das zweite Bild accommodierte.

Es ist nun die Frage aufzuwerfen, wo liegt der scheinbare Ort der Bilder von einem Objekte, welches eine gegebene regelmässige Gestalt hat und sich in einer krummen Oberfläche von ebenfalls bekannter Form spiegelt, und wie drückt sich in analytischer Weise die Gestalt der Bilder sowie das Verhältnis zwischen Objekt und Bildern aus. Diese Frage ist in gewisser Beziehung eine Umkehrung derjenigen, welche sich Leupold gestellt und durch die Konstruktion seiner Maschinen auch gelöst hat. Wir suchen die zu einem normalen Objekte sich ergebende Verzerrung, während dort zu einem richtig proportionierten Bilde das zugehörige verzerrte Objekt gesucht wurde.

Zweck der nachstehenden Ausführungen soll es nun sein, einen Beitrag zu der eben angeregten Frage zu liefern, und zwar wollen wir die Gestalt und Lage der

Bilder für den Fall untersuchen, dass wir es mit zwei concentrischen Kugeln zu thun haben, von denen die eine sich in der anderen spiegelt. Nun lässt die Stellung der Aufgabe zwei Möglichkeiten zu, einmal kann sich die kleine in der grösseren also in einem konkaven Spiegel, andererseits auch die grössere in der kleinen Kugel mithin in einem konvexen Spiegel spiegeln. Für diesen letzteren Fall wollen wir uns hier entscheiden. Da nun die Lage der Bilder wesentlich beeinflusst wird durch die Stellung des Auges, so wollen wir uns dieses fest in der Oberfläche der gespiegelten grösseren Kugel denken. Das Auge sieht allerdings von der gespiegelten Kugel und mithin auch von den Bildern nur einen Teil, nämlich denjenigen, der ausserhalb des Tangentenkegels liegt, den wir vom Auge aus an die kleinere Kugel legen können. Da bei der vorliegenden Fassung der Aufgabe zu einer vom Auge aus nach dem Centrum der beiden Kugeln gezogenen Achse sowohl die gespiegelte wie auch die spiegelnde Fläche symmetrisch liegt, so werden die Bilder offenbar auf Rotationsflächen liegen. Mithin können wir uns vorläufig darauf beschränken, die Gleichung der erzeugenden Kurve zu bestimmen. Im weiteren Verlaufe wollen wir uns an die Ausführungen von Reusch anschliessen und in analoger Weise die Spiegelung in zwei Hauptschnitten, die durch die Kugel gelegt werden, untersuchen. Der eine Schnitt werde parallel zur Ebene des Papiers durch Auge und Kugelmittelpunkt gelegt und wird als Hauptnormalschnitt (Matthiessen) bezeichnet, der andere steht senkrecht zu diesem und daher auch zur Ebene des Papiers und wird der Nebennormalschnitt genannt. Es entspricht somit der Hauptnormalschnitt dem Reusch'schen Meridionalschnitt, während der Nebennormalschnitt mit dem Parallelschnitt identisch ist.

Kapitel II.

Die Abscissengleichungen konjugierter Punkte in den beiden Hauptschnitten.

Es lässt sich zeigen, dass die katoptrische Abscissengleichung für paraxiale Strahlen auch für die schiefe Incidenz aufgestellt werden kann, sofern man nur die Abscissen auf dem einfallenden und reflektierten Strahle selbst misst. Man findet also die beiden Abscissen von Objekt und Bild nicht mehr auf derselben Linie liegend, sondern auf zwei verschiedenen, deren Schnittpunkt in der spiegelnden Fläche der Anfangspunkt ist. Reusch hat das Verdienst, den Hauptstrahl eines jeden einfallenden Bündels als Abscissenachse eingeführt zu haben. Für den vorliegenden Fall wollen wir zunächst die Abscissengleichung für den Hauptnormalschnitt also für den Schnitt parallel zur Ebene des Papiers aufstellen. Wie vorhin erwähnt, finden wir in diesem Falle das Bild eines leuchtenden Punktes als Schnittpunkt zweier unendlich benachbarter Strahlen nach der Reflexion. Es seien R und r die Radien der beiden gegebenen concentrischen Kugeln, C sei der Mittelpunkt der Kugeln. Von einem beliebigen Punkte P_0 der gespiegelten Kugel falle ein Lichtstrahl $P_0 O$ auf die kleinere Kugel, der in der Richtung O A reflektiert wird. Der Einfallswinkel des Strahles sei e_2, der Reflexionswinkel e_1. Ausserdem falle ein zu $P_0 O$ unendlich benachbarter Strahl $P_0 P'$ auf die spiegelnde Fläche, der nach A′ reflektiert wird. Einfalls- und Reflexionswinkel für diesen Strahl seien $e_2 - de_2$ und $e_1 - de_1$. Das Bild des Punktes P_0 liegt im Durchschnittspunkte P_1 der blinden Verlängerungen von den beiden reflektierten Strahlen O A und O′A′. Zur Aufstellung der Abscissengleichung wollen wir hier einen Weg einschlagen, der von Reusch für die Spiegelung an einer konkaven sphärischen Fläche angegeben ist und sich

natürlich auch mit unbedeutenden Veränderungen auf konvexe Flächen anwenden lässt. Verlängert man nämlich (Figur 1) die Strahlen $P_0 O$ und $P_0 O'$ bis zum nochmaligen Durchschnitt mit der Kugel in D und D' sowie ebenfalls die reflektierten Strahlen O A und O' A' bis B und B', so lässt sich durch passende Vereinigung zwischen den Bögen die Gleichung aufstellen:

$$OD + DD' + OO' = OB + BB' - OO'$$

oder

$$2\,OO' + DD' - BB' = 0.$$

Ferner folgt aus ähnlichen unendlich schmalen Dreiecken:

$$DD' = \frac{P_0 D \cdot OO'}{P_0 O}$$

sowie

$$BB' = \frac{P_1 B \cdot OO'}{OP_1}.$$

Nun ist unter Berücksichtigung des Vorzeichens

$$OP_0 = -x_0,\ OP_1 = x_1.$$

Ausserdem

$$P_0 D = -x_0 + 2r\cos e_2$$
$$P_1 D = 2r\cos e_2 - x_1.$$

Diese Werte, in unsere frühere Gleichung eingesetzt, geben:

$$2\,OO' + \frac{(-x_0 + 2r\cos e_2)\,OO'}{-x_0} - \frac{(2r\cos e_2 - x_1)\,OO'}{x_1} = 0$$

oder

$$2r x_1 \cos e_2 + 2r x_0 \cos e_2 = 4 x_0 x_1,$$

woraus folgt:

$$1)\quad \frac{r\cos e_2}{2}\cdot\frac{1}{x_0} + \frac{r\cos e_2}{2}\cdot\frac{1}{x_1} = 1.$$

Dieselbe Gleichung kann man aber auch gleich direkt aus der dioptrischen Abscissengleichung ableiten. Die von Reusch und anderen angebene Gleichung für schiefe Incidenz hat die folgende Form

$$\frac{-r\sin e_1}{\sin(e_2 - e_1)}\cdot\frac{\cos e_2^{\,2}}{x_0} + \frac{nr\sin e_1}{\sin(e_2 - e_1)}\cdot\frac{\cos e_1^{\,2}}{x_1} = 1.$$

Erwägt man nun, dass für die Spiegelung $n = -1 = \frac{\sin e_2}{\sin e_1}$ ist, so ergiebt sich

$$\frac{r \cos e_2}{2} \cdot \frac{1}{x_0} + \frac{r \cos e_2}{2} \cdot \frac{1}{x_1} = 1.$$

Aus dieser Gleichung folgen dadurch, dass wir x_0 bezw. x_1 unendlich gross setzen, die Werte für die Hauptbrennweiten. Es ist

$$f_1 = \varphi_1 = \frac{r \cos e_2}{2}.$$

Für den Nebennormalschnitt, den wir uns also senkrecht zur Ebene des Papiers zu denken haben, liegt (Figur 2) das Bild von P_0 im Schnittpunkte P_2 von $P_0 C$ und der blinden Verlängerung des reflektierten Strahles OA, so dass mithin $OP_2 = x_2$ ist. Auch hier gelangt man leicht zu einer Beziehung zwischen x_0 und x_2. Wir ziehen nämlich von C aus eine Parallele zu OP_0, welche die Verlängerung von OA in Φ_2 schneidet, und ebenso durch C eine Parallele zu OA, welche die Verlängerung von $P_0 O$ in F_2 schneidet.

Aus der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke $P_2 \Phi_2 C$ und $P_2 O P_0$ folgt:

$$C\Phi_2 : P_2 \Phi_2 = P_0 O : OP_2$$

oder, wenn wir $C\Phi_2 = OF_2 = f_2$ und $O\Phi_2 = \varphi_2$ setzen,

$$f_2 : (\varphi_2 - x_2) = -x_0 : x_2,$$

woraus resultiert

$$\frac{f_2}{x_0} + \frac{\varphi_2}{x_1} = 1,$$

eine Gleichung, die wieder die Normalform hat. Die Brennweiten sind hier f_2 und φ_2. Da die Winkel $\Phi_2 OC$ und $F_2 OC$ absolut genommen gleich sind, so ist das Parallelogramm $OF_2 C\Phi_2$ ein Rhombus, daher steht das Einfallslot OC auf der anderen Diagonale senkrecht, und wir haben:

$$f_2 = \varphi_2 = \frac{r}{2 \cos e_2}.$$

Zu demselben Resultate gelangt man auch, wenn man

von der dioptrischen Abcissengleichung für diesen Fall ausgeht. Es ist nämlich

$$\frac{-\,r\sin e_1}{\sin(e_2-e_1)}\cdot\frac{1}{x_0}+\frac{n\,r\sin e_1}{\sin(e_2-e_1)}\cdot\frac{1}{x_1}=1.$$

Durch dieselben Erwägungen wie vorhin beim Hauptnormalschnitt kommt man zu der Gleichung:

$$2)\quad \frac{r}{2\cos e_2}\cdot\frac{1}{x_0}+\frac{r}{2\cos e_2}\cdot\frac{1}{x_2}=1,$$

die mit der anderen identisch ist. Die Abscissengleichungen konjugierter Punkte sollen nun den Ausgangspunkt bilden für die Aufstellung der Gleichungen der Bildkurven.

Kapitel III.

Die Gleichungen für die beiden Bildkurven.

Nach unserer früheren Annahme befindet sich das beobachtende Auge in der grösseren Kugel fest, und zwar sei dieser feste Punkt des Auges der Punkt A. Diesen Punkt A wählen wir als Anfangspunkt eines Polarkoordinatensystems. Die Verbindungslinie vom Auge A mit dem Kugelcentrum C sei die feste Achse des Systems. Der Polarwinkel werde mit φ bezeichnet. Wir bestimmen zuerst das Bild des Kreises im Hauptnormalschnitt (Figur 1). P_1 ist das Bild eines beliebigen Punktes P_0, welches wir in der früher angedeuteten Weise gefunden haben, und zwar wählen wir zwei unendlich benachbarte Strahlen, die, von P_0 ausgehend, nach dem Auge reflektiert werden. Der reflektierte Strahlenfächer darf also höchstens so dick sein, dass er noch eben in die Pupille des Auges hineingeht. Der Radiusvektor $\varrho_1 = AP_1$ drückt sich aus durch

$$\varrho_1 = -x_0 + x_1.$$

Aus dem Dreiecke ACO folgt:

$$x_0^2 + R^2 - 2\,R\,x_0\cos\varphi = r^2,$$

woraus weiterhin resultiert

$$3) \quad -x_0 = R\cos\varphi - \sqrt{r^2 - R^2\sin^2\varphi}.$$

Wenn wir den Wert unter der Wurzel absolut nehmen, so müssen wir vor dem Wurzelzeichen das negative Vorzeichen setzen, wovon man sich durch eine einfache geometrische Konstruktion der Werte auf der rechten Seite leicht überzeugen kann.

Aus 1) folgt

$$x_1 = \frac{x_0\, r\cos e_2}{2x_0 - r\cos e_2},$$

folglich

$$\varrho_1 = -x_0 + \frac{x_0\, r\cos e_2}{2x_0 - r\cos e_2}$$

oder

$$\varrho_1 = \frac{2x_0\, r\cos e_2 - 2x_0^2}{2x_0 - r\cos e_2}.$$

Es ist aber

$$4) \quad \cos e_2 = \frac{\sqrt{r^2 - R^2\sin^2\varphi}}{r}.$$

Setzen wir die Werte von $-x_0$ und $\cos e_2$ in die Gleichung für ϱ_1 ein, so bekommen wir

$$\varrho_1 = \frac{2\left(R\cos\varphi - \sqrt{r^2 - R^2\sin^2\varphi}\right)^2 - 2\sqrt{r^2 - R^2\sin^2\varphi}\left(R\cos\varphi - \sqrt{r^2 - R^2\sin^2\varphi}\right)}{2R\cos\varphi - \sqrt{r^2 - R^2\sin^2\varphi}}$$

Hieraus resultirt schliesslich

$$5) \quad \varrho_1 = \frac{2R\cos\varphi\left\{R\cos\varphi - \sqrt{r^2 - R^2\sin^2\varphi}\right\}}{2R\cos\varphi - \sqrt{r^2 - R^2\sin^2\varphi}}.$$

In ganz analoger Weise erhalten wir für den Nebennormalschnitt (Figur 2), wenn wir den Radiusvektor AP_2 mit ϱ_2 bezeichnen,

$$\varrho_2 = -x_0 + x_2.$$

Aus Gleichung 2) folgt:

$$x_2 = \frac{r\, x_0}{2x_0\cos e_2 - r},$$

mithin ist

$$\varrho_2 = -x_0 + \frac{r\,x_0}{2\,x_0 \cos e_2 - r}$$

oder

$$\varrho_2 = \frac{-2\,x_0\,(x_0 \cos e_2 - r)}{2\,x_0 \cos e_2 - r}.$$

Setzt man in diese Gleichung wieder die Werte für $-x_0$ und $\cos e_2$ ein, so erhält man

$$\varrho_2 = \frac{2\,(R\cos\varphi - \sqrt{r^2 - R^2\sin^2\varphi})\,(-R\cos\varphi\sqrt{r^2 - R^2\sin^2\varphi} - R^2\sin^2\varphi)}{-2\,R\cos\varphi\sqrt{r^2 - R^2\sin^2\varphi} + r^2 - 2\,R^2\sin^2\varphi}$$

oder auch

$$6)\quad \varrho_2 = \frac{2\,R\left\{R\cos 2\varphi\sqrt{r^2 - R^2\sin^2\varphi} - \cos\varphi\,(r^2 - 2\,R^2\sin^2\varphi)\right\}}{2\,R\cos\varphi\sqrt{r^2 - R^2\sin^2\varphi} - (r^2 - 2\,R^2\sin^2\varphi)}.$$

Somit haben wir in 5) und 6) die Gleichungen der Bildkurven für die beiden Hauptschnitte aufgestellt, durch Rotation dieser Kurven um die feste Achse würden wir daher zu den beiden Bildflächen der gespiegelten Kugel gelangen. Es sei an dieser Stelle noch bemerkt, dass man die Gleichungen der Kurven auch in rechtwinkligen Koordinaten als Funktionen der beiden Radien R und r ausdrücken kann, man gelangt dabei zu zwei Gleichungen höheren Grades; jedoch erfordert diese Operation einen ungleich grösseren Aufwand an Zeit und Mühe und gestattet weiterhin nicht eine so bequeme Diskussion wie die angegebene Ableitung.

Um uns nun, bevor wir zur Konstruktion der beiden Kurven schreiten, über ihre Gestalt in einigen Punkten weiter zu unterrichten, bilden wir die ersten Differentialquotienten von ϱ nach φ, also $\frac{d\varrho_1}{d\varphi}$ und $\frac{d\varrho_2}{d\varphi}$.

Bei der Differentiation von 5) erhält man nach einer Reihe von Operationen, die eine möglichste Vereinfachung des Ausdruckes von $\frac{d\varrho_1}{d\varphi}$ herbeiführen, schliesslich

$$7) \quad \frac{d\varrho_1}{d\varphi} = \frac{2R\sin\varphi\left\{R^3\cos\varphi(3\cos^2\varphi-2)+2Rr^2\cos\varphi+\sqrt{r^2-R^2\sin^2\varphi}\left(R^2(1-3\cos^2\varphi)-r^2\right)\right\}}{\sqrt{r^2-R^2\sin^2\varphi}\left(2R\cos\varphi-\sqrt{r^2-R^2\sin^2\varphi}\right)^2}.$$

In gleicher Weise bilden wir aus 6) $\frac{d\varrho_2}{d\varphi}$ und bekommen hierfür nach Vornahme derselben Operationen wie bei $\frac{d\varrho_1}{d\varphi}$ zuletzt den Wert:

$$8) \quad \frac{d\varrho_2}{d\varphi} = \frac{2R\sin\varphi\left\{R\cos\varphi\left((2R^4\sin^2\varphi-3R^2r^2)(4\sin^2\varphi-1)+4r^2\right)+\sqrt{r^2-R^2\sin^2\varphi}\left((2R^4\sin^2\varphi-2R^2r^2)(3-4\sin^2\varphi)-r^4\right)\right\}}{\sqrt{r^2-R^2\sin^2\varphi}\left(2R\cos\varphi\sqrt{r^2-R^2\sin^2\varphi}-(r^2-2R^2\sin^2\varphi)\right)^2}$$

Mit Hilfe der beiden Differentialquotienten wollen wir nun einige Punkte der Kurven in zwei speziellen Fällen untersuchen und zwar einmal den auf der Achse liegenden Punkt sowie ein zweites Mal den äussersten sichtbaren Punkt.

Für den ersten Fall ist der Winkel $\varphi = 0$, also

$$\sin\varphi = 0, \quad \cos\varphi = 1.$$

Da sowohl $\frac{d\varrho_1}{d\varphi}$ wie auch $\frac{d\varrho_2}{d\varphi}$ im Zähler den Faktor $\sin\varphi$ haben, so muss $\frac{d\varrho_1}{d\varphi} = 0$ und $\frac{d\varrho_2}{d\varphi} = 0$ sein, wenn die anderen Bestandteile der Differentialquotienten endlich bleiben. Abgesehen von dem

vor der Klammer stehenden Ausdrucke $2\,R\sin\varphi$ nehmen nun die Differentialquotienten für $\varphi = 0$ die Werte an

$$\frac{d\varrho_1}{d\varphi} = \frac{2\,R\sin\varphi\left\{R^3 - 2\,R^2 r + 2\,R\,r^2 - r^3\right\}}{r\,(r-2\,R)^2}$$

und

$$\frac{d\varrho_2}{d\varphi} = \frac{2\,R\sin\varphi\left\{3\,R^2 - 3\,R\,r + r^2\right\}\left\{R - r\right\}}{r\,(2\,R-r)^2}.$$

Mithin werden beide Differentialquotienten für $\varphi = 0$ zu Null.

Für den äussersten sichtbaren Punkt des Kreises wird

$$\sin\varphi = \frac{r}{R},\quad \cos\varphi = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R},$$

daraus folgt

$$\sqrt{r^2 - R^2\sin^2\varphi} = 0.$$

Im Nenner von $\frac{d\varrho_1}{d\varphi}$ und $\frac{d\varrho_2}{d\varphi}$ kommt aber $\sqrt{r^2 - R^2\sin^2\varphi}$ als Faktor vor, daher werden für diesen Grenzwert von φ beide Differentialquotienten unendlich gross, sofern die übrigen Glieder derselben endlich bleiben. Lässt man die Wurzel im Nenner vorläufig unberücksichtigt, so wird

$$\frac{d\varrho_1}{d\varphi} = \frac{r}{2}\cdot\frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{\sqrt{r^2 - R^2\sin^2\varphi}}.$$

Ferner finden wir

$$\frac{d\varrho_2}{d\varphi} = \frac{2\,R^2\sqrt{R^2 - r^2}}{r\sqrt{r^2 - R^2\sin^2\varphi}}.$$

Abgesehen von dem Ausdrucke $\sqrt{r^2 - R^2\sin^2\varphi}$ bleiben also die übrigen Bestandteile der beiden Differentialquotienten endlich, folglich ist

$$\frac{d\varrho_1}{d\varphi} = \infty \text{ und } \frac{d\varrho_2}{d\varphi} = \infty.$$

Wenn man die Gleichung einer Kurve in Polarkoordinaten gegeben vorliegend hat, so ist bekanntlich die trigonometrische Tangente desjenigen Winkels, den die

Tangente an der Kurve in einem beliebigen Punkte mit dem betreffenden Radiusvektor macht

$$\operatorname{tg} \alpha = \varrho \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varrho}.$$

Von der Richtigkeit der vorstehenden Gleichung kann man sich auch geometrisch leicht überzeugen, indem man an jede der beiden Bildkurven (Figur 3 und 4) zwei unendlich benachbarte Radii vectores zieht, die den Winkel $\mathrm{d}\varphi$ einschliessen; fällt man von dem einen Radiusvektor ein Lot auf den zweiten, so ist in dem kleinen Dreiecke, welches gebildet wird von dem Zuwachse des Radiusvektors $\mathrm{d}\varrho$, dem unendlich kleinen durch die beiden Vektoren aus der Kurve geschnittenen Bogen und dem Lote $\varrho\,\mathrm{d}\varphi$

$$\operatorname{tg} \alpha = \varrho \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varrho}.$$

Untersuchen wir nun zunächst die Richtung der Tangente an der Kurve im Hauptnormalschnitt, so folgt

1) für $\sin \varphi = 0$, $\cos \varphi = 1$:

$$\operatorname{tg} \alpha = \varrho_1 \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varrho_1} = \frac{\varrho_1}{0} = \infty,$$

d. h. die Tangente steht im Durchschnittspunkt der Kurve mit der Achse senkrecht auf der Achse.

2) für $\sin \varphi = \frac{r}{R}$, $\cos \varphi = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R}$

$$\text{ist } \operatorname{tg} \alpha = \varrho_1 \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varrho_1} = \frac{\varrho_1}{\infty} = 0,$$

d. h. für den letzten sichtbaren Punkt tangiert der Radiusvektor die Kurve.

Im Nebennormalschnitt erhält man

1) für $\sin \varphi = 0$, $\cos \varphi = 1$

$$\operatorname{tg} \alpha \quad \varrho_2 \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varrho_2} = \frac{\varrho_2}{0} = \infty,$$

die Tangente steht also ebenfalls auf der Achse senkrecht.

2) für $\sin\varphi = \frac{r}{R}$, $\cos\varphi = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R}$ finden wir

$$\operatorname{tg}\alpha = \varrho_2 \frac{d\varphi}{d\varrho_2} = \frac{\varrho_2}{\infty} = 0,$$

mithin tangiert auch hier der Radiusvektor die Kurve.

Kapitel IV.

Die Konstruktion der Bildkurven in den beiden Hauptschnitten.

Wir wollen nun die Konstruktion der beiden Bildkurven angeben und zwar, da sich beim Nebennormalschnitt die Ausführung einfacher gestaltet, zuerst für diesen.

In Figur 3 findet man das Bild eines jeden Punktes des Kreises, indem man den betreffenden Punkt P_0 mit dem Centrum C verbindet und den entstandenen Winkel $P_0 C' A$ halbiert. Die Halbierungslinie des Winkels schneidet den spiegelnden Kreis in O. Diesen Punkt O verbinden wir mit dem Augenpunkte A und verlängern diese Linie bis zum Durchschnitt mit $P_0 C$ in P_2, dann ist P_2 der zweite Bildpunkt von P_0, wie unmittelbar aus unserer früher gegebenen Definition hervorgeht. Die in Figur 3 gezeichnete Kurve ist in der That durch Konstruktion einer ganzen Reihe von Bildpunkten in der angegebenen Weise entstanden.

Für den letzten sichtbaren Punkt P_0', den wir erhalten, wenn wir von A aus eine Tangente an den kleinen Kreis ziehen, wird der Einfallswinkel 90^0 und der Durchschnittspunkt zwischen dem reflektierten Strahle und $P_0' C$ kommt nach P_0' zu liegen, so dass also in diesem Grenzfalle der Bildpunkt mit dem leuchtenden Punkte zusammenfällt.

Für einen anderen Punkt jedoch, nämlich für den

Augenpunkt A selbst, lässt uns die angegebene Konstruktionsmethode im Stich, da wir dann einen Centralstrahl haben und daher keinen Schnittpunkt zwischen reflektiertem Strahle und der Centrale des leuchtenden Punktes bekommen. Nun haben wir es aber in diesem Falle mit paraxialen Strahlen zu thun und könnten demnach aus der bekannten katoptrischen Abscissengleichung für paraxiale Strahlen einfach den Wert von x_2 und damit den Abstand des Bildpunktes von der spiegelnden Fläche bestimmen. Ausserdem gelangt man noch auf einem anderen Wege zu einer leicht auszuführenden Konstruktion. Es war

$$\varrho_2 = -x_0 + x_2.$$

Für $\varphi = 0$ geht die Gleichung 6) über in

$$\varrho_2 = \frac{2R(R-r)}{2R-r}.$$

Ferner ist dann

$$-x_0 = R - r$$

also

$$x_2 = \frac{2R(R-r)}{2R-r} - R + r$$

oder

$$x_2 = \frac{r(R-r)}{2R-r}.$$

Setzen wir für $R-r$ wieder $-x_0$, so erhält man hieraus die Proportion

$$9) \quad -x_0 : x_2 = (R - \tfrac{1}{2}r) : \tfrac{1}{2}r.$$

Man zeichnet daher mit R und $(R-\frac{1}{2}r)$ zwei Kreise um A, zieht von A aus einen beliebigen Strahl, der die beiden Kreise in E und G schneidet, und verbindet E mit dem Schnittpunkte H der Achse und der spiegelnden Fläche. Legt man noch durch G eine Parallele zu EH, welche AC in A′ trifft, so ist A′ der gesuchte Bildpunkt.

Anstatt für den Hauptnormalschnitt zur Konstruktion der Bildkurve die einzelnen Punkte derselben als Schnitt-

punkte je zweier unendlich benachbarter Strahlen aufzusuchen, empfiehlt es sich, eine andere Methode anzuwenden, die sich im wesentlichen auf einen bekannten Hilfssatz stützt, den auch Reusch in seiner schon mehrfach erwähnten Abhandlung angegeben hat, und auf den wir deshalb an dieser Stelle nur verweisen wollen. Es führt uns dieser Satz auf den sognannten Fixpunkt, der für den Hauptnormalschnitt dieselbe Rolle spielt wie das Centrum für den Nebennormalschnitt. Der Fixpunkt ist dadurch definiert, dass seine Koordinaten in Bezug auf das Abscissenachsensystem gleich den Brennpunktsdistanzen sind. Um für einen beliebigen Punkt P_0 (Figur 4) den Fixpunkt J zu finden, ziehen wir zu dem Strahle P_0O das Einfallslot OC. Aus 1) war für die Brennweiten der Wert abgeleitet:

$$f_1 = \varphi_1 = \frac{r \cos e_2}{2}.$$

Die Brennpunkte F_1 und Φ_1 werden daher konstruiert, indem man $OC = r$ in M halbiert und von M aus auf die Verlängerungen der Strahlen P_0O und OA Lote fällt. Legen wir nun durch F_1 und Φ_1 Parallelen zu dem reflektierten und einfallenden Strahle, die sich in J schneiden, so ist J der gesuchte Fixpunkt. Das Bild des Punktes P_0 liegt für den Hauptnormalschnitt im Schnittpunkte P_1 der Linie P_0J mit der blinden Verlängerung des reflektierten Strahles. Von der Richtigkeit der Konstruktion dieses Bildpunktes überzeugt man sich durch folgende Betrachtung. Aus ähnlichen Dreiecken ergiebt sich

$$P_0O : J\Phi_1 = OP_1 : \Phi_1 P_1$$

oder

$$-x_0 : \frac{r \cos e_2}{2} = x_1 : \left(\frac{r \cos e_2}{2} - x_1\right),$$

hieraus resultiert

$$\frac{r \cos e_2}{2} \cdot \frac{1}{x_0} + \frac{r \cos e_2}{2} \cdot \frac{1}{x_1} = 1.$$

Während im Nebennormalschnitt der Fixpunkt C für alle Punkte fest blieb, ändert sich hier die Lage des Fixpunktes für jeden anderen Punkt. Wie aus der Figur hervorgeht liegt bei der Spiegelung der Fixpunkt immer auf dem Einfallslote, man hat also zu seiner Konstruktion nur noch einen der Brennpunkte nötig. Je näher der Punkt P_0 an den Augenpunkt heranliegt, desto näher rückt der Fixpunkt auf dem Einfallslote nach dem Centrum zu und umgekehrt. Für den äussersten Punkt P_0' wird der Einfalls- und Reflexionswinkel 90^0. Die Brennpunkte F_1 und Φ_1 rücken dann in den Berührungspunkt der Tangente mit dem Kreise zusammen, in denselben Punkt muss daher auch J fallen, der Rhombus ist mithin für den Grenzfall in einen Punkt zusammengeschrumpft. Da die Linie $P_0'J$ und $P_0'A$ keinen Schnittpunkt und daher auch keinen bestimmten Bildpunkt für P_0' liefern, so müssen wir, um den Ort des Bildes festzulegen, von der nachstehenden Erwägung ausgehen: Es ist

$$\varrho_1 = -x_0 + x_1;$$

für $\sin\varphi = \frac{r}{R}$, $\cos\varphi = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R}$ geht 5) über in

$$\varrho_1 = \sqrt{R^2 - r^2}.$$

In diesem Falle wird aber auch

$$-x_0 = \sqrt{R^2 - r^2},$$

daraus folgt

$$x_2 = 0,$$

d. h. für den letzten sichtbaren Punkt muss das Bild in der spiegelnden Fläche selbst liegen.

Für $\varphi = 0$ versagt die Konstruktion des Fixpunktes ebenfalls. In analoger Weise wie beim Nebennormalschnitt ist

$$\varrho_1 = -x_0 + x_1.$$

Aus Gleichung 5) folgt genau wie vorhin

$$\varrho_1 = \frac{2(R^2 - Rr)}{2R - r}.$$

Wieder ist

$$-x_0 = R - r;$$

hieraus geht zum Schluss hervor, dass sich verhält

$$-x_0 : x_1 = (R - \tfrac{1}{2}r) : \tfrac{1}{2}r.$$

Die Konstruktion des Bildpunktes geschieht also in derselben Weise wie im Nebennormalschnitt. Ausserdem lassen die Resultate erkennen, dass in diesem Bildpunkte sich die beiden Kurven berühren, wovon man sich übrigens auch schon früher bei Gelegenheit der Aufstellung der Gleichungen für die Bildkurven überzeugen konnte.

Kapitel V.

Das Verhältnis der Elemente von Objekt und Bild in den Normalschnitten und in den Bildflächen.

Es erübrigt nun noch eine Beziehung herzustellen zwischen der Grösse eines unendlich kleinen Elementes der gespiegelten Kugel und dem dazu gehörigen Bilde (Anamorphose). Wir wollen daher zunächst das lineare Verhältnis zwischen einem unendlich kleinen Teile des grössten Kugelkreises in den beiden Hauptschnitten zu seinen Bildern betrachten.

a) Im Hauptnormalschnitt.

Wir nehmen ein unendlich kleines lineare Objekt O der Kugeloberfläche, welches von den Punkten P_0 und P_0'' begrenzt wird. Zieht man von diesen beiden Punkten Linien nach dem Centrum und bezeichnet den von diesen beiden Linien eingeschlossenen Winkel mit $2\,d\omega$, so erlangt man für die Grösse des Objektes den Ausdruck:

$$O = 2\,R\,d\,\omega.$$

Das zu O gehörige Bild B_1 wird erhalten, wenn wir die von P_0 und P_0'' ausgehenden und nach dem Auge

reflektierten Hauptstrahlen bis zum Durchschnitte mit der Bildkurve verlängern. Es ist offenbar

$$B_1 = \varrho_1 \, d\varphi.$$

Mithin verhält sich

$$10) \quad \frac{O}{B_1} = \frac{2 R \, d\omega}{\varrho_1 \, d\varphi}.$$

Hier suchen wir nun $d\omega$ als Funktion von φ auszudrücken. Wie aus der Figur leicht hervorgeht ist

$$11) \quad d\omega = de_2 - d\varphi.$$

Aus dem Dreiecke AOC folgt

$$\sin e_2 = \frac{R \sin \varphi}{r}.$$

Differenzieren wir diese Gleichung, so folgt

$$\cos e_2 \, de_2 = \frac{R}{r} \cos \varphi \, d\varphi.$$

oder

$$d e_2 = \frac{R \cos \varphi}{r \cos e_2} d\varphi$$

Nun war schon früher gefunden

$$\cos e_2 = \frac{\sqrt{r^2 - R^2 \sin^2 \varphi}}{r},$$

daher wird

$$12) \quad d e_2 = \frac{R \cos \varphi}{\sqrt{r^2 - R^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi$$

und weiter

$$13) \quad d\omega = \frac{R \cos \varphi - \sqrt{r^2 - R^2 \sin^2 \varphi}}{\sqrt{r^2 - R^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi.$$

Diesen Wert für $d\omega$ setzen wir in die obige Gleichung ein und nehmen gleichzeitig auch für ϱ_1 seinen Wert aus 5), dann lautet die Gleichung 10)

$$\frac{O}{B_1} = \frac{2 R (R \cos \varphi - \sqrt{r^2 - R^2 \sin^2 \varphi}) (2 R \cos \varphi - \sqrt{r^2 - R^2 \sin^2 \varphi})}{\sqrt{r^2 - R^2 \sin^2 \varphi} \cdot 2 R \cos \varphi (R \cos \varphi - \sqrt{r^2 - R^2 \sin^2 \varphi})},$$

hieraus folgt unmittelbar

$$14) \quad \frac{O}{B_1} = \frac{2 R \cos \varphi - \sqrt{r^2 - R^2 \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi \sqrt{r^2 - R^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Für $\varphi = 0$ wird

$$15) \quad \frac{O}{B_1} = \frac{2R - r}{r}.$$

In demselben Verhältnisse standen aber auch in 9) die Entfernungen des leuchtenden Punktes und seines Bildpunktes von der spiegelnden Fläche. Es drückt also die Formel 15) in Verbindung mit 9) den bekannten Satz aus, dass für paraxiale Strahlen sich Objekt und Bild zu einander verhalten wie ihre respektiven Entfernungen von der spiegelnden Fläche.

Für $\sin\varphi = \frac{r}{R}$, $\cos\varphi = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R}$ wird

$$16) \quad \frac{O}{B_1} = \frac{2R}{\sqrt{r^2 - R^2\sin^2\varphi}} = \infty.$$

Für Linienelemente, die weit vom Auge in der grösseren Kugel entfernt liegen, wird also das Bild sehr stark verkleinert.

b) Im Nebennormalschnitt.

In ganz analoger Weise wie unter a) erhalten wir auch jetzt für ein unendlich kleines Element

$$O = 2R\,d\omega.$$

Für die Aufstellung einer Gleichung für die Bildgrösse normieren gleichfalls dieselben Schlüsse wie unter a), man erhält daher

$$B_2 = \varrho_2\,d\varphi,$$

folglich ist

$$17) \quad \frac{O}{B_2} = \frac{2R\,d\omega}{\varrho_2\,d\varphi}.$$

Wie vorhin ist

$$d\omega = \frac{(R\cos\varphi - \sqrt{r^2 - R^2\sin^2\varphi})\,d\varphi}{\sqrt{r^2 - R^2\sin^2\varphi}}.$$

Diesen Wert setzen wir zusammen mit dem für ϱ_2 aus 6) in 17) ein und bekommen

$$18) \quad \frac{O}{B_2} = \frac{(R\cos\varphi - \sqrt{r^2 - R^2\sin^2\varphi})(2R\cos\varphi\sqrt{r^2 - R^2\sin^2\varphi} - (r^2 - 2R^2\sin^2\varphi))}{\sqrt{r^2 - R^2\sin^2\varphi}(R\cos 2\varphi\sqrt{r^2 - R^2\sin^2\varphi} - \cos\varphi(r^2 - 2R^2\sin^2\varphi))}.$$

Für $\varphi = 0$ wird

$$19) \quad \frac{O}{B_2} = \frac{2R - r}{r},$$

womit wir wieder auf den bekannten Satz der paraxialen Katoptrik zurückgekommen sind.

Für $\sin\varphi \quad \frac{r}{R}$, $\cos\varphi = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R}$ erhält man

$$20) \quad \frac{O}{B_2} = \frac{R}{\sqrt{r^2 - R^2 \sin^2\varphi}} = \infty.$$

Auch im Nebennormalschnitt wird mithin für vom Auge weit entfernt liegende Elemente ihr Bild stark verkleinert.

Wir kommen nun dazu, auch das Verhältnis der Flächenelemente von Objekt und Bild zu untersuchen. Zu diesem Zwecke gehen wir von dem ursprünglichen Normalschnitte zu einem um den unendlich kleinen Winkel $d\psi$ gegen denselben geneigten Schnitte über. Das frühere Linienelement O überstreicht dabei eine kleine Fläche O′, für deren Grösse wir finden

$$21) \quad O' = 4R^2 \sin\omega \cos\omega \, d\omega \, d\psi.$$

Gleichzeitig überstreichen die zu O gehörigen Bilder B_1 und B_2 zwei kleine Flächen B_1' und B_2', deren Grösse ausgedrückt werden kann durch

$$22) \quad B_1' = \varrho_1^2 \sin\varphi \, d\varphi \, d\psi,$$

$$23) \quad B_2' = \varrho_2^2 \sin\varphi \, d\varphi \, d\psi.$$

Mithin verhält sich

$$24) \quad \frac{O'}{B_1'} = \frac{4R^2 \sin\omega \cos\omega \, d\omega}{\varrho_1^2 \sin\varphi \, d\varphi}$$

und

$$25) \quad \frac{O'}{B_2'} = \frac{4R^2 \sin\omega \cos\omega \, d\omega}{\varrho_2^2 \sin\varphi \, d\varphi}.$$

Nun ist

$$\sin\omega = \frac{-x_0 \sin\varphi}{r}$$

sowie

$$\cos\omega = \frac{R + x_0 \cos\varphi}{r},$$

folglich wird

$$26)\quad \frac{O'}{B_1'} = \frac{(2R\cos\varphi - \sqrt{r^2 - R^2\sin^2\varphi})^2 \cdot (R\sin^2\varphi + \cos\varphi\sqrt{r^2 - R^2\sin^2\varphi})}{r^2\cos^2\varphi\sqrt{r^2 - R^2\sin^2\varphi}}.$$

Ebenso findet man

$$27)\quad \frac{O'}{B_2'} = \frac{(R\cos\varphi - \sqrt{r^2 - R^2\sin^2\varphi})^2 (2R\cos\varphi\sqrt{r^2 - R^2\sin^2\varphi} - (r^2 - 2R^2\sin^2\varphi))^2 (R\sin^2\varphi + \cos\varphi\sqrt{r^2 - R^2\sin^2\varphi})}{r^2\sqrt{r^2 - R^2\sin^2\varphi}\,(R\cos 2\varphi\sqrt{r^2 - R^2\sin^2\varphi} - \cos\varphi(r^2 - 2R^2\sin^2\varphi))^2}.$$

Betrachten wir nun noch die Werte der letzten beiden Gleichungen in den früheren Grenzfällen, so ist

1) für $\sin\varphi = 0$, $\cos\varphi = 1$

$$28)\quad \frac{O'}{B_1'} = \frac{(2R - r)^2}{r^2}$$

und auch

$$29)\quad \frac{O'}{B_2'} = \frac{(2R - r)^2}{r^2}.$$

2) für $\sin\varphi = \frac{r}{R}$, $\cos\varphi = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R}$

$$30)\quad \frac{O'}{B_1'} = \frac{4R}{\sqrt{r^2 - R^2\sin^2\varphi}}$$

sowie

$$31)\quad \frac{O'}{B_2'} = \frac{R}{\sqrt{r^2 - R^2\sin^2\varphi}}.$$

Aus den in diesem letzten Kapitel erhaltenen Resultaten insbesondere aus den Werten für die Verhältnisse in den Spezialfällen geht hervor, dass von einem Objekte, welches in den richtigen Proportionen in die grössere Kugelhülle hineingezeichnet wird, diejenigen Teile, welche von der Achse weit entfernt liegen, sehr stark verkürzt erscheinen und zwar bei beiden Bildflächen. Wollte man also in der Weise wie Leupold es gethan hat, Anamorphosen konstruieren, so müsste man die entfernter liegenden Teile bedeutend vergrössern, wobei man ausserdem noch zu entscheiden hätte, ob man für die erste oder zweite Bildfläche die Anamorphose zeichnen will. Da sich verhält in 30) und 31)

$$B_1' : B_2' = 4 : 1$$

so muss man demnach, wenn man für die zweite Bildfläche die Verzerrung zeichnen will, dieselbe für die entferntesten sichtbaren Elemente noch viermal so gross nehmen wie für die erste, um zu einem richtig proportionierten Bilde zu gelangen. Da jedoch die zweite Bildfläche hinter der ersten liegt, so ist wohl mit Sicherheit anzunehmen, dass sich das Auge auf das ihm zunächst liegende Bild accommodieren wird und dieses demnach das zum Entwerfen der Anamorphosen massgebliche sein wird.

Hiermit dürfte das Problem der katoptrischen Anamorphosen für den vorliegenden Fall als vollständig gelöst zu betrachten sein.

Zum Schlusse will ich hier noch bemerken, dass ich die Anregung zu dieser vorstehenden Arbeit Herrn Prof. Dr. Matthiessen verdanke, und drängt es mich daher, diesem, meinem hochverehrten Lehrer, für die Anregung sowie für das Interesse, welches er der Arbeit hat zu Teil werden lassen, auch an dieser Stelle meinen aufrichtigsten Dank auszusprechen.

Rostock, im Februar 1897.

Fig. I.

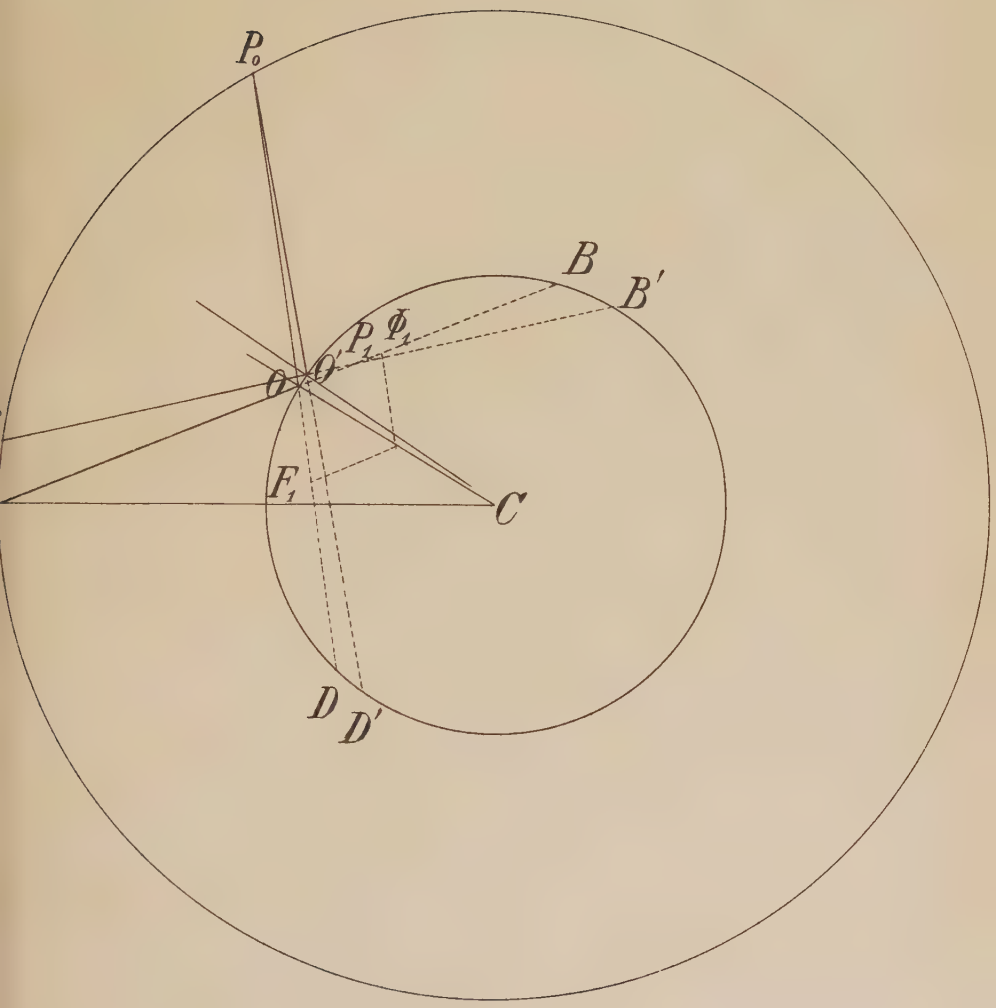

Fig. II.

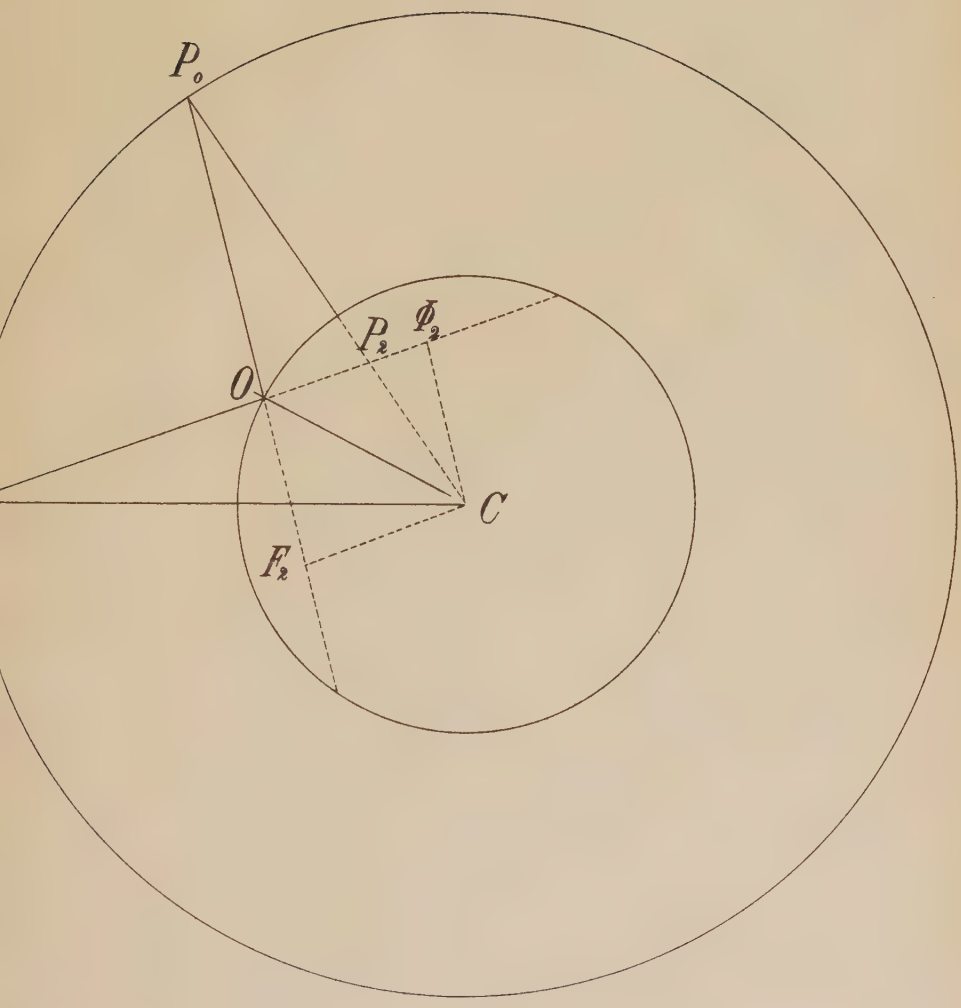

Fig. III.

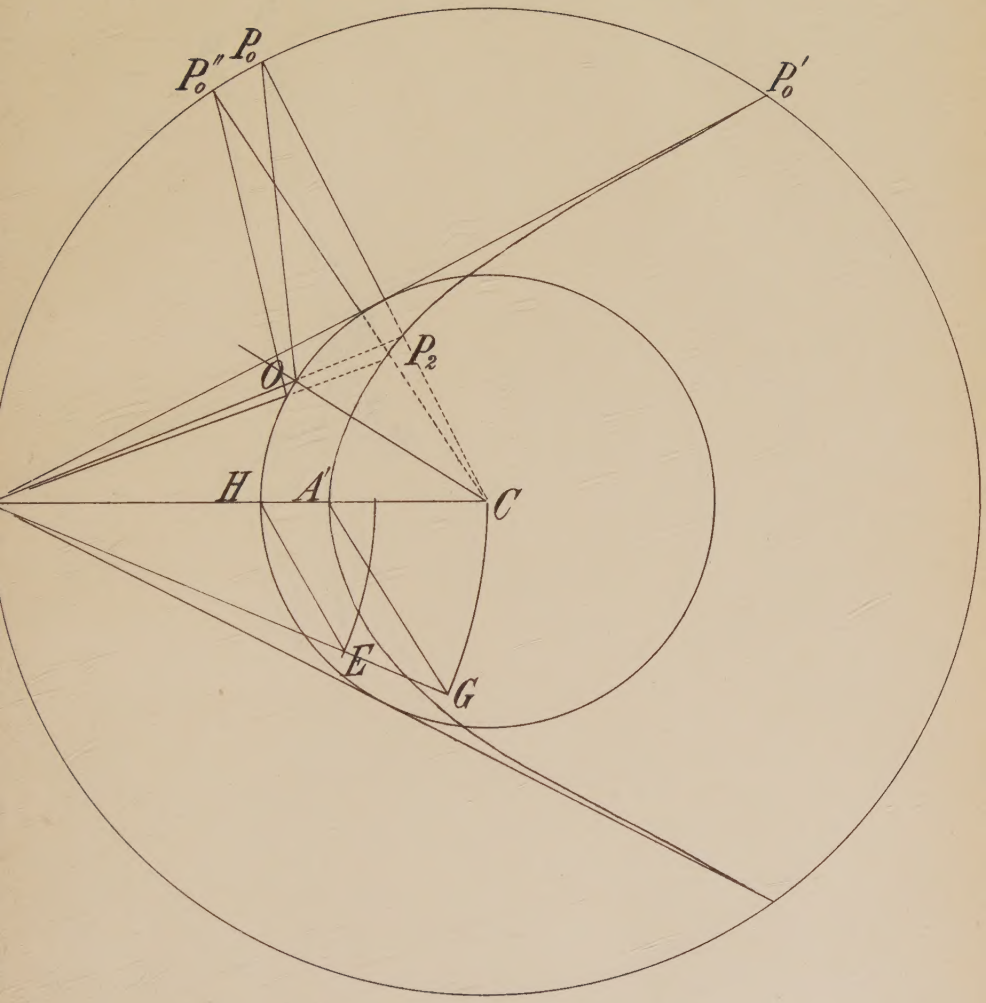
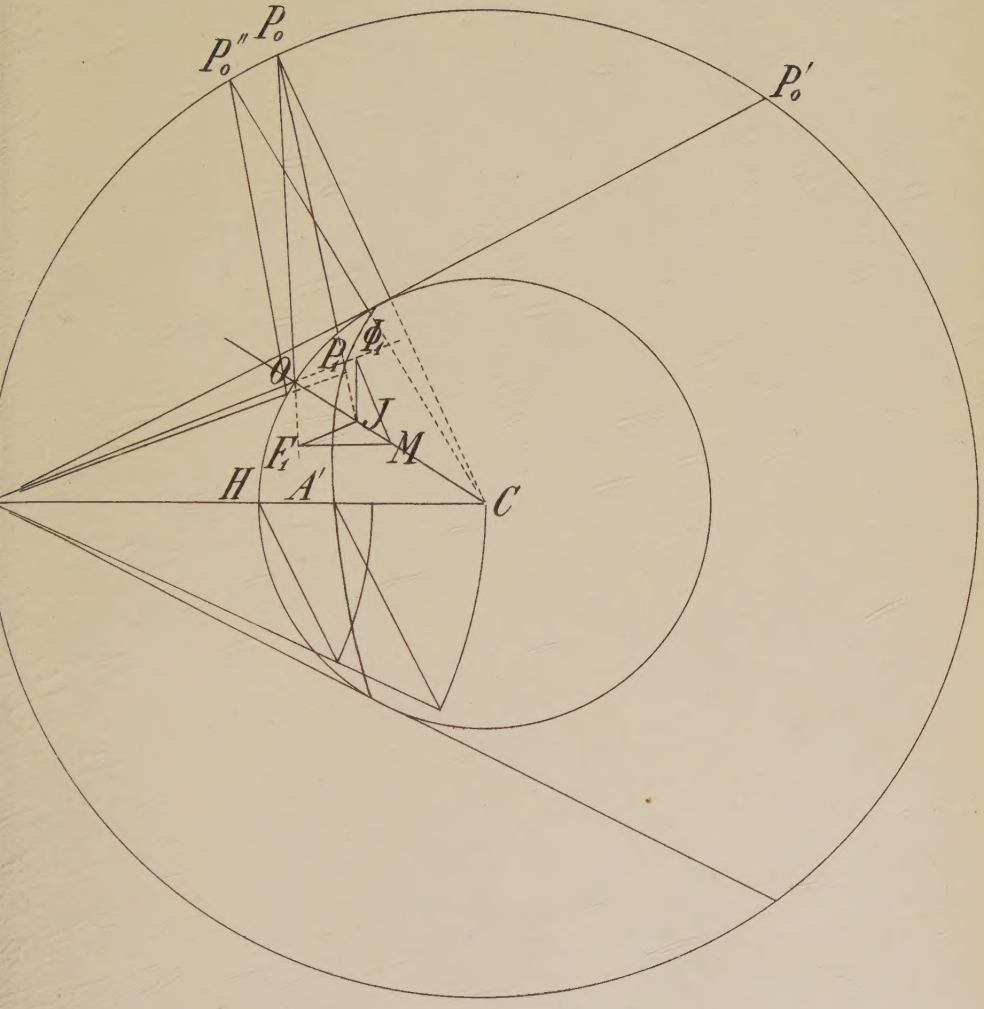
Fig. IV.